Universidad del Papaloapan

Terra Uberrima, Mens Aperta

Ingeniería en Computación

Notas del curso de Algebra

Autor:
Sergio Ivvan Valdez Peña

Octubre de 2009

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Sobre las notas. Las presentes notas intentan representar lo más importante del curso, y tienen como fin servir de apoyo a estudiantes y profesores, así como la mejora misma del curso. Estas notas no contienen todo lo que se verá en el curso, ni sustituyen los libros, la clase o los apuntes. Además, se debe de considerar que como cualquier material y cualquier cosa son un documento mejorable.
Sobre el contenido de la asignatura. Se seguirá y tomará en cuenta el contenido de la asignatura como está en el plan, sin embargo, la secuencia del mismo se puede alterar, así como también se pueden agregar partes que se consideren importantes. Todo esto con el afán de mejorar la preparación del estudiante y la temática del curso.
A los estudiantes. La mejora de este material y el alcance real e impacto real del curso en tu preparación depende mucho de ti. Si detectas errores, omisiones, o algo mejorable en este material ten pon seguro que tu aportación será tomada en cuenta. Si quieres agregar o proponer algo en tareas, ejercicios, contenido, etc. Tus sugerencias serán bien recibidas. Puedes ayudar a mejorar tu curso e impactar en la formación de futuros estudiantes de la materia con tu aportación.
Sobre la bibliografía. La bibliografía se incluye en este documento, pero parte de la finalidad de las notas es reducir la dependencia de la bibliografía, esto no porque la blibliografía no sea adecuada, sino por que no todos los estudiantes tienen siempre acceso a ella, aún los libros de la biblioteca son finitos, así que no se puede pedir que todos los estudiantes acccesen a ellos al mismo tiempo. Por otro lado, se espera que las notas se ajusten de una manera más precias a los contenidos del curso. Se recomienda a su vez que el estudiante revise la bibliografía cuando le sea sugerido por el profesor, y cuando lo determine adecuado, para profundizar en los temas, ver otra forma de explicarlos, detectar errores en las presentes notas (que obviamente se pueden dar), ver otros problemas y ejemplos, etc. [5, 6]

Capítulo 2

Conjuntos y Relaciones

El presente capítulo introduce de forma básica lo que son los conjuntos, su definición y representación.

2.1. Conceptos

Definición 1 *Un **conjunto** es una colección, grupo o lista de objetos o cosas agrupadas bajo cierta cualidad, característica o condición.*

Definición 2 *Un **elemento o miembro** es el nombre con el cual se designa a cada uno de los objetos que pertencen al conjunto.*

Así, un conjunto se puede formar con: los libros de una biblioteca, los alumnos de una escuela, los meses del año, etc. Los conjuntos también se pueden formar por elementos cuyas características no tengan una relación directa o no sean fáciles de definir por una clausula, por ejemplo, podemos decir que cierto conjunto son los siguientes elementos { perro, avión, lago, cuchara}. Aunque no se ve una relación directa entre los elementos del conjunto, por el simple hecho de decir que esos son los elementos que forman el conjunto, entonces el conjunto queda definido. Existen ciertos criterios que se deben de tomar en cuenta para enunciar un conjunto, tales como:

El conjunto debe de estar bien definido. Podrá determinarse si un elemento pertenece o no al conjunto. Por ejemplo, si se dice que un conjunto son las estaciones del año es facil ver que verano es parte del conjunto, pero marzo no lo es. La propiedad o cualidad bajo la cual agrupamos a los elementos del conjunto (en el ejemplo, el que sea una estación del año) nos permite verificar sin dudas, y de forma clara si algún objeto es miembro o no del conjunto.

Los elementos del conjunto se cuentan solo una vez. Si el conjunto son los nombres de los estudiantes de un grupo (notese que se define como los "nombres", NO los estudiantes), y los estudiantes son: José Carlos, Hector Alonzo, José Benito, José Agustín, y Roberto Carlos, entonces los elementos del conjunto son: { José, Carlos, Hector, Alonzo, Benito, Agustín, Roberto}.

No se toma en cuenta el orden de los elementos dentro del conjunto. El conjunto del ejemplo anterior se puede definir también como: { Roberto, Carlos, Hector, José, Benito, Agustín, Alonzo} o con alguna otra permutación y el conjunto sigue siendo el mismo.

2.2. Definición

Por convención se hace referencia o se representa a un conjunto con una letra mayúscula, por ejemplo:

$$A, Z, D, F, T, R...$$

A a los elementos del conjunto se les representac on letras minusculas, por ejemplo:

$$a, z, d, f, t, r...$$

La definición de un conjunto se puede hacer por extensión (o enumeración) y por comprensión (también llamada abstracción). Por **extensión**. Se lista a todos los elementos del conjunto, por ejemplo:
El conjunto M de los meses del año:

$$M = \{enero, junio, marzo, septiembre, diciembre, abril, mayo, octubre, \\ noviembre, julio, febrero, agosto\}$$

Por comprensión. Consiste en enunciar la propiedad o cualidad que comparten los elementos del conjunto, por ejemplo:
El conjunto M de los meses del año:

$$M = \{x|x \text{ es un mes del año}\}$$

Se lee, el conjunto M formado por x tal que x es un mes del año. De esta forma podemos reducir a una clausula o enunciado un número muy grande (incluso infinito) de elementos sin necesidad de escribirlos explícitamente.

2.3. Pertenencia

La pertenencia, denotada por $\in$, como su nombre lo dice, se refiere a los elementos que pertenencen a un conjunto, por ejemplo:

Sea M el conjunto de los meses del año, o escrito de otra forma:

$$M = \{x|x \text{ es un mes del año }\}$$

entonces:

$$junio \in M$$

Se lee, *junio* es un elemento de M o *junio* pertenece a M.

De manera similar existe la NO pertenencia denotada por $\notin$, entonces para el ejemplo anterior podemos escribir:

$$martes \notin M$$

Se lee, *martes* NO es un elemento de M o *martes* NO pertenece a M.

2.4. Tipos de conjuntos

2.4.1. Conjunto Universal

El conjunto universal, comunmente denotado por U o Ω, consta de todos los elementos que se pudieran ver involucrados en la resolución un problema. Por ejemplo, si estamos tratando con temas de algebra para los alumnos de ingeniería en computación, el conjunto universal puede ser el conjunto de todos los temas 2000que se ven en la ingeniería en computación.

2.4.2. Conjunto vacío

El conjunto vacío representa a aquel conjunto que NO contiene ningún elemento, y se denota por $\emptyset$. Para representarlo por extensión se utiliza $\{\}$.

2.4.3. Subconjunto

Definición 3 *Un conjunto A es subconjunto de un conjunto B, si todo elemento de A pertenece a B.*

La notación para denotar un subconjunto es la siguiente:

$A \subseteq B$, se lee A es subconjunto de B, o A está contenido en B.

Algunos autores utilizan el símbolo $\subset$ para denotar al subconjunto. Para fines de este curso haremos la siguiente diferencia, si se utiliza el símbolo $\subseteq$ (**inclusión**), por ejemplo en $A \subseteq B$, indica que A es subconjunto de B pudiendo incluso ser exactamente los mismo conjuntos. Si utilizamos el símbolo $A \subset B$ (**inclusión estricta**), entonces A es un subconjunto de B pero A no contiene todos los elementos de B. Ejemplo:

$B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, entonces $A \subseteq B$. $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $A = \{b, c, d, e, f\}$, entonces $A \subset B$.

La primera expresión nos dice que A es un subconjunto de B pero que puede ser incluso exactamente igual a B, la segunda expresión nos dice que A es un subconjunto de B, pero que no todos los elementos de B se encuentra en A.
De la misma manera para indicar que un conjunto NO es un subconjunto de otro se utiliza el símbolo $\nsubseteq$. Ejemplo

$$B = \{a, b, c, d, e, f, g\} \text{ y } A = \{a, b, c, 2, e, f, g\}, \text{ entonces } A \nsubseteq B.$$

Notese que B contiene a "casi" todos los elementos de A con excepeción del 2, y por esta diferencia ya no es un subconjunto del mismo.

2.4.4. Subconjunto propio e impropio

Dados los conjuntos A y B tales que $A \subseteq B$, se dice que A es un subconjunto **propio** de B, si B contiene al menos un elemento que no pertenece a A, es decir, todos los elementos de A pertencen también a B, pero además, B tiene otros elementos que no pertenecen a A, el caso en que todos los elementos de A pertencen a B se dice que A es un subconjunto **impropio** de B.

2.4.5. Conjunto complemento

El conjunto complemento está definido por los elementos del conjunto universal que no pertencen a un conjunto. Por ejemplo, sea el conjunto A los números primos de un dígito, entonces $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, y sea el conjunto universal (que denotaremos por Ω) los números enteros de un dígito, entonces $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Entonces el complemento de A, que se denota por A' o A^c, es $A' = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$.

2.5. Diagrama de Venn-Eüler

Los diagramas de Venn-Eüler (o simplemente diagramas de Venn) se utilizan para representar gráficamente un conjunto. De esta manera podemos estudiar y analizar de una forma más clara a los conjuntos, sus relaciones y operaciones. Para la representación del conjunto se utilizan círculos dentro de los cuales se distribuyen los elementos del conjunto. La forma del diagrama para el conjunto $A = \{x | x \text{ es una vocal}\}$, se muestra en la Figura 2.1.

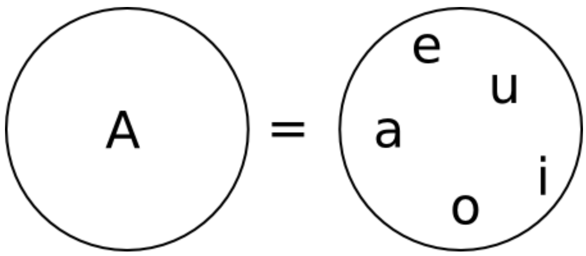

Figura 2.1: Diagrama de Venn del conjunto de las vocales.

Cuanto se desea representar el conjunto universal, entonces se dibuja un rectangulo con una letra u en la esquina superior derecha, o se inscriben dentro del rectangulo a todos los elementos del conjunto universal. Para ejemplificar el uso del diagrama de Venn, considere el siguiente ejemplo:

Sea $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, y
$A\prime = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$.

Entonces el diagrama de Venn que representa lo anterior se muestra en la Figura 2.2:

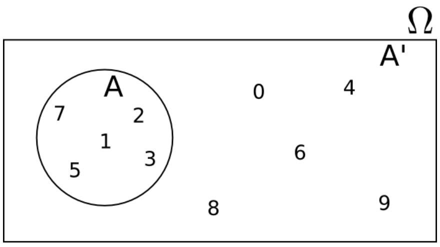

Figura 2.2: Diagrama de Venn que ejemplica al conjunto universo, y al conjunto complemento.

NO es necesario escribir las letras A y $A\prime$ dentro del diagrama y puede mal entenderse (al pensar que dichas letras son parte del conjunto), en este caso se agregaron para indicar que parte del diagrama corresponde a cada conjunto, por otro lado se puede poner solo la letra que representa al conjunto y no todos sus elementos.

2.6. Operaciones con Conjuntos

Las operaciones más comunes que se realizan con los conjuntos son las de: **unión, partición, intersección, diferencia y complemento**. A partir de estas operaciones se pueden definir nuevos conjuntos (que son el resultado de aplicar la operación).

2.6.1. Unión

La **unión** de dos (o más) conjuntos es el conjunto formado por los elementos de los conjuntos a los cuales se les aplica la operación. El símbolo para denotar la unión de conjuntos es $\cup$.

Consideremos a los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}, \text{ y}$$
$$B = \{3, 4, 5\},$$

el conjunto C resultante de la unión entre A y B es:

$$C = A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

El resultado de la unión de dos conjuntos se puede representar gráficamente rellenando del mismo color los conjuntos que se unen, los posibles rewsultados de la unión de dos conjuntos se aprecian en la Figura 2.3

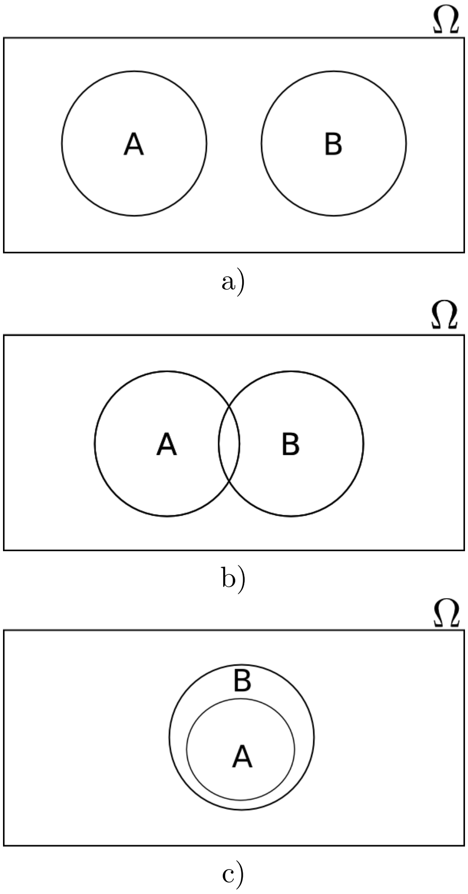

Figura 2.3: Posibles resultados de la unión de dos conjuntos A y B. a) Ningún elemento de A pertenece a B, b) A y B tienen algunos elementos en comun, y c) El conjunto A está contenido en B pero no son exactamente iguales.

Propiedades

- El resultado de aplicar la operación unión es único. Ejemplo

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\}, \\ B &= \{3, 4, 5\}, \\ A \cup B &= \{x | x \in A \text{ o } x \in B\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

  Y no existe otro resultado posible para $A \cup B$.

- *Conmutativa.* El resultado de la unión de dos o más conjuntos no varia si se aplica en diferente orden, es decir $A \cup B = B \cup A$, o para tres conjuntos $A \cup B \cup C = C \cup A \cup B = B \cup A \cup C$.
- *Asociativa.* Se puede sustituir la unión de dos conjuntos por su resultado en una unión de varios conjuntos y este será el mismo. Ejemplo, $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = (C \cup A) \cup B = B \cup (A \cup C)$, etc. Los parentesis indican que primero se realizó la operación de dentro del parentesis. Por ejemplo para el caso $(A \cup B) \cup C$, primero se obtuvo el conjunto resultante de $(A \cup B)$ y luego se realizó la uni
'on de este con el C.
- Elemento neutro. La unión de culquier conjunto con el conjunto vacío, da como resultado el mismo conjunto. Ejemplo, $A \cup \emptyset = A$.

2.6.2. Intersección

La intersección de un conjunto A con un conjunto B es el conjunto formado por los elementos de que pertenecen a A y pertenecen también a B. Se puede generalizar para un número n arbitrario de conjuntos,la interesecci'on será el conjunto formado por los elementos que pertenecen a los n conjuntos. La intersección se denota por el símbolo $\cap$:

$A \cap B$ se lee A intersección B
En notación por comprensión o abstracta:
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

La representación gráfica de la intersección se hace iluminando el área de la intersección de los dos conjuntos, como se muestra en la Figura 2.4

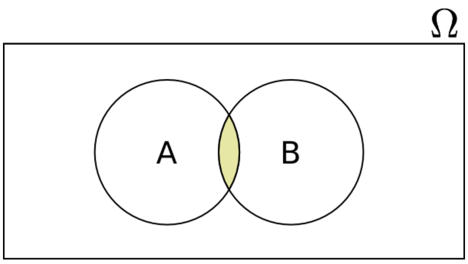

Figura 2.4: Resultado de la intersección de dos conjuntos que comparten algún(os) elementos en común.

Propiedades

- El resultado de aplicar la operación intersección es único. Ejemplo

$$A = \{1, 2, 3\},$$
$$B = \{3, 4, 5\},$$
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\} = \{3\}$$

Y no existe otro resultado posible para $A \cap B$.

- *Conmutativa.* El resultado de la intersección de dos o más conjuntos no varía si se aplica en diferente orden, es decir $A \cap B = B \cap A$, o para tres conjuntos $A \cap B \cap C = C \cap A \cap B = B \cap A \cap C$.
- *Asociativa.* Se puede sustituir la intersección de dos conjuntos por su resultado en una intersección de varios conjuntos y este será el mismo. Ejemplo, $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = (C \cap A) \cap B = B \cap (A \cap C)$, etc.

  Los parentesis indican que primero se realizó la operación de dentro del parentesis. Por ejemplo, para el caso $(A \cap B) \cap C$, primero se obtuvo el conjunto resultante de $(A \cap B)$ y luego se realizó la intersección de este con el C.
- Caso especial. La intersección de cualquier conjunto con el mismo da como resultado el mismo conjunto. Ejemplo, $A \cap A = A$.

Si la intersección de los conjuntos A y B es el vacío, se escribe:
$A \cap B = \emptyset$
Entonces se dice que A y B son conjuntos disjuntos.

2.6.3. Partición

Se le llama partición de un conjunto A a todos los subconjuntos no vacíos de A y disjuntos entre ellos. De tal forma, que la unión de los conjuntos resultado de la partición da por resultado A. Ejemplo:

$$A = A_1; A_2; A_3...$$

donde los puntos ... quieren decir *y así sucesivamente*, y cada A_i, representa un subconjunto disjunto de A, por lo tanto: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...$

Gráficamente las particiones se ven como en la:

- Fígura 2.5, partición formada por dos subconjuntos, $A = A_1 \cup A_2$.
- Fígura 2.6, partición formada por tres subconjuntos, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

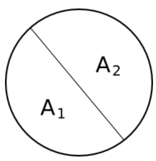

Figura 2.5: Una partición en dos subconjuntos.

Las particiones se realizan de acuerdo a las necesidades del problema, por ejemplo: supongamos que nuestro conjunto universo es una baraja inglesa, nuestro conjunto de interes pueden

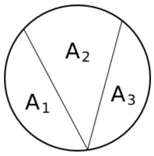

Figura 2.6: Una partición en tres subconjuntos.

ser los diamantes rojos, y nuestras particiones de mayor interes pueden ser aquellas cartas de los diamantes rojos que pueden forma un black jack (21, formado por el as y una carta mayor o igual a 10).

2.6.4. Diferencia

La diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, pero que no pertenecen a B.
La diferencia se indica como $A - B$, aunque también es muy común (posiblemente el simbolo más común) utilizar $A \setminus B$, y se lee A menos B o A diferencia B, o los elementos en A que no están en B.
La diferencia no es conmutativa, y se realiza en general solo entre dos conjuntos. El resultado de la diferencia de $A \setminus B$ se puede apreciar en la Figura 2.7.

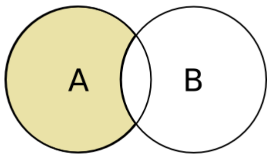

Figura 2.7: Resultado de la diferencia de dos conjuntos que tienen algún(os) elementos en común.

2.6.5. Complemento

El complemento de un conjunto está formado por el conjunto de los elementos que no pertenece a él, y que están en el conjunto universal. Así una definición más precisa es que el complemento de A, denotado por A' o A^c, es el conjunto universal diferencia el conjunto A, ejemplo:
$A' = U \setminus A$
El complemento de un conjunto se ilustra gráficamente en la Figura 2.8

2.6.6. Condensado de propiedades del algebra de conjuntos

La Tabla 2.6.6, resume las propiedades del algebra de conjuntos, estas propiedades resultan utles ya que nos sirven para tratar de forma abstracta las operaciones sobre conjuntos, pudiendo trabajar incluso con conjuntos de tamaño infinito [4].

Propiedad de idempotencia
$A \cup A = A$
$A \cap A = A$
Propiedad asociativa
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Propiedad de conmutativa
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
Propiedad de distributiva
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Propiedades de identidad
$A \cup \emptyset = A$
$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$
$A \cap \mathbf{U} = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$
Propiedad de involución
$(A^c)^c = A$
Propiedad del complementario
$A^c \cup A = \mathbf{U}$
$\mathbf{U}^c = \emptyset$
$A \cap \mathbf{U} = A$
$\emptyset^c = \mathbf{U}$
Ley de Morgan
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

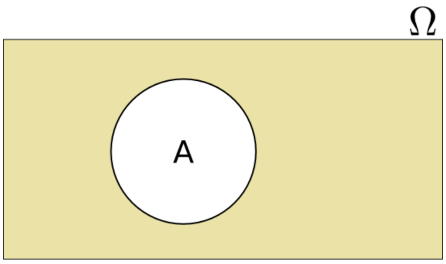

Figura 2.8: El complemento de un conjunto son los elementos del universo que no pertencen al conjunto.

2.7. Algunos conjuntos básicos de uso común en ingeniería

Existen cieros conjuntos que son relevantes en problemas de la vida cotidiana, y que son manejados de forma cotidiana por las personas (existen conjuntos que son importantes para la vida cotidiana pero que manejan comunmente solo los matemáticos y profesionales afines). A continuación se listan algunos de los más importantes:

2.7.1. El conjunto de los números naturales

Los números naturales se definen así:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4...\}$$

Donde los puntos suspensivos quieren decir y así sucesivamente.

2.7.2. El conjunto de los números enteros

Los números enteros se denotan por $\mathbb{Z}$ están definidos de la siguiente forma:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \text{ Que se puede expresar como:}$$
$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, 3, ...\}, \text{ o bien:}$$
$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}, \text{ o bien:}$$

Se puede ver que todo número natural es un número entero, por lo tanto:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

2.7.3. El conjunto de los números racionales

El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$ y se define de la siguiente forma:

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

Que se lee, $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números de la forma a entre b tales que a y b pertenecen a los enteros y b es diferente de 0.
Hay quue notar que todos los número enteros se pueden repesentar por un racional, la forma más simple es el mismo entero dividido entre el racional:

$8 = \frac{8}{1}, 5 = \frac{5}{1}$, etc.
Dado lo anterior, entonces:
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

A los racionales que se pueden expresar por un número finito de decimales les llamaremos: **racionales con expansión decimal finita**, por ejemplo:

$\frac{1}{4} = 0{,}25$

La fracción de un cuarto puede ser representada de forma decimal con un número finito de digitos.
A los racionales como $1/3 = 0{,}333....$ donde los puntos ... quieren decir que así continua infinitamente, les llamaremos: **racionales con expansión decimal periódica infinita**.

2.7.4. El conjunto de los números irracionales

El conjunto de los números irracionales se denota por $\mathbb{Q}'$ y están dados por aquellos números decimales que no se pueden escribir de la forma a/b donde a y b son enteros, por ejemplo: π, $\sqrt{2}$, etc. $\pi = 3{,}14159...$ y sigue así infinitamente pero sin repetir un periodo, y no se puede representar como una fracción de enteros.

2.7.5. El conjunto de los números reales

El conjunto de los números reales lo definiremos como la unión de los racionales con los irracionales. Es decir:

$$\mathbf{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

2.7.6. El conjunto de los números imaginarios

A cualquier número real positivo se le puede extraer la raiz cuadra y será otro número real positivo, los números imaginarios se introducen para definir la raiz cuadrada de un número real negativo, donde:

$i^2 = -1$, por lo tanto:
$i = \sqrt{-1}$

Para referirnos entonces al resultado de alguna raiz cuadrada de un número negativo, lo hacemos en términos de i, por ejemplo: $\sqrt{-4} = \sqrt{(2^2)(-1)} = (2)(\sqrt{-1}) = 2i$

2.7.7. El conjunto de los números complejos

Un número complejo se define como la suma de un número real y un imaginario, por ejemplo: $3 + 2i$. El conjunto de los número complejos se denota por $\mathbb{C}$
Nótese que al número imaginario puede ser $0i$, por lo cual:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2.7.8. Desigualdades de Orden

Se define una relación de orden en R como sigue: el número real a es menor que el número real b si $b - a$ es un número positivo.
La notación de desigualdades es la siguiente:

$a > b$	se lee a es mayor que b.
$a < b$	se lee a es menor que b.
$a \geq$	se lee a es mayor o igual que b.
$a \leq b$	se lee a es menor o igual que b.

En términos geométricos si $a > b$ signifia que a está más hacia la derecha de la línea real.

2.7.9. Intervalos

El conjunto de los números reales x que cumplen que:

$a < x < b$	se le llama intervalo abierto desde a hasta b
$a \leq x \leq b$	se le llama intervalo cerrado desde a hasta b.
$a < x \leq b$	se le llama intervalo abierto-cerradp desde a hasta b
$a \leq x < b$	se le llama intervalo cerrado-abierto desde a hasta b.

2.7.10. Valor absoluto

El valor absoluto de un número real x se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

2.7.11. Conjuntos acotados

Se dice que un conjunto A está acotado si para toda $x \in A$, existe un número M tal que $x \leq M$ y un número N tal que $x \geq N$.
A M se le llama cota superior, y a N se le llama cota inferior, muchas veces se hace referencia a conjuntos acotados como acotado por arriba o acotado por abajo, que indican que existe la cota superior e inferior respectivamente.

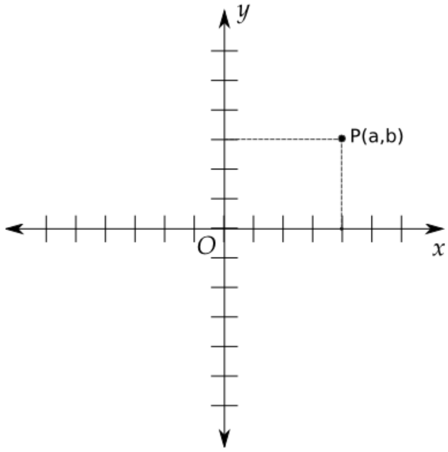

Figura 2.9: Plano Cartesiano.

2.8. Producto Cartesiano

2.8.1. Par ordenado

Un par ordenado consta de dos elementos a los cuales se les ha dado un orden, y se denota por (a, b), donde a es el primer elemento y b es el segundo.
La diferencia entre el par ordenado (a, b) y el conjunto $\{a, b\}$ es que en el par ordenado SI importa el orden de los elementos y en el conjunto no.
A la generalización de elementos ordenados que forman más de un par, por ejemplo (a, b, c), se le conoce como tupla, en el caso del ejemplo es una 3-tupla. En el caso de n elementos en los cuales importa el orden le llamaremos $n-$tupla

2.8.2. Plano Cartesiano

El plano Cartesiano también recibe el nombre de sistema coordenado, sistema coordenado rectangular. Consta de dos rectas perpendiculares entre si que se intersectan en un punto denominado como **origen** y que se le denota comunmente por la letra **O.**, al eje horizontal se le conoce como el *eje de las abscisas* o *eje* **x**, al eje vertical se le conoce como *eje de las ordenadas* o *eje* **y**. El plano Cartesiano se muestra en la Figura 2.9.
A la intersección de dos rectas perpendiculares al eje de las abscisas y ordenadas se le conoce como **punto** (nótese que es solo a la intersección no a las rectas). Un punto esta asociado con un *par ordenado* (a, b) donde a siempre representa la distancia partiendo del origen hacia la derecha del eje de las abscisas si a es positiva y hacia la izquierda si es negativa, a su vez, b representa la distancia del origen hacia la parte superior en el eje de las ordenadas si es positiva o hacia la parte inferior si es negativa.
A la región definada por la parte superior al eje de las abcisas (abscisas positivas)y a la derecha del eje de las ordenadas (ordenadas positivas) se le conoce como *primer cuadrante.* Todos los pares ordenados asociados con puntos en este cuadrante tienen tanto la abcisa como la ordenada postiva. A la región definida por las abscisas negativas y las ordenadas positivas

se le conoce como *segundo cuadrante*, la región definida por las abscisas y ordenadas negativas se le conoce como *tercer cuadrante*, y finalmente a las región definida por las abcisas positivas y ordenadas negativas se le conoce como *cuarto cuadrante*.

2.8.3. Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos A y B, se llama **producto cartesiano** del conjunto A por el conjunto B, al conjunto C cuyos elementos son todos los pares ordenados (x, y) tales que x pertenece a A y y pertenece a B. Es decir:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

El conjunto de todo los pares ordenados de números reales se le denota por $\mathbb{R}^2$, y se le define como el producto Cartesiano del conjunto de los reales por el conjunto de los reales, es decir: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Al conjunto de todos los pares ordenados de números reales se le denomina *plano numérico* y se denota por $\mathbb{R}^2$.

2.9. Relaciones

Una relación R entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$. [2]. A la relación de dos conjuntos es decir $R \subseteq A \times B$ se le llama relación binaria (o simplemente relación), a la relación de tres conjuntos $R \subseteq A \times B \times C$ se le conoce como relación terciaría. Y así sucesivamente a una relación de n conjuntos se le llama relación $n-$aría.
Si R es una relación de A en B, para $a \in A$ y $b \in B$, se escribe aRb, o $(a, b) \in R$.
Si R es una relación de A en A, es decir $A \times A$, decimos que R es una relación sobre A o en A, si $R \subseteq A \times B$, entonces decimos que R es una relación de A en B.
La relación binaria es un conjunto de pares ordenados.
Ejemplo. Dados $a \in A$ y $b \in B$, para $A = \{1, 2, 7\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, sea R la relación definida por $<$, entonces:

$$R = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

Al conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados de R se le denomina como el dominio de R, y lo denotaremos $dom(R)$, a los segundos elementos de los pares ordenados se le denomina el rango de R y lo denotaremos como $rango(R)$.
Considerando $a \in A$ y $b \in B$ una relación se denota como aRb, se lee a a está relaciona con b, si a NO está relacionada con b se escribe $a \not R b$.

2.9.1. Inversa de una relación

Definimos la inversa de una relación, denotada por R^{-1}, como el conjunto de los apres ordenados que cuando se invierte su orden pertenecen a R. Es decir:

$$R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$$

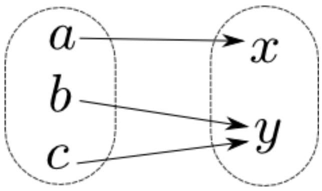

Figura 2.10: Ejemplo de un diagrama de flechas para representar una relación.

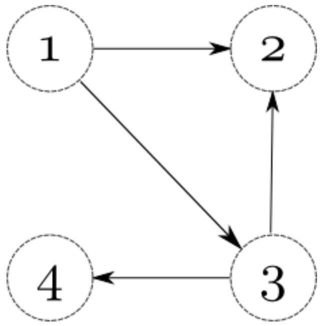

Figura 2.11: Ejemplo de un grafo dirigido que representa una relación de A en A

En otras palabras $bR^{-1}a$ si y solo si aRb. Es decir:

$$bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$$

2.9.2. Relación Vacía

A la relación R de A en B, tal que $R = \emptyset$, se le llama **relación vacía**.

2.9.3. Relación Universal

A la relación R de A en B, tal que $R = A \times B$, se le llama **relación universal**.

2.9.4. Representación Gráfica de una Relación

Una forma de representar una relación de un conjunto A sobre un conjunto B es por medio de un diagrama de flechas, como el mostrado en la Figura 2.10. Ejemplo, considere los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{x, y\}$ sea R la relación definida por $R = \{(a, x), (b, y), (c, y), \}$, entonces el diagrama de flechas para tal relación es el mostrado en la Figura 2.10
Una forma de representar una relación de A en A es por medio de un grafo dirigido. Por ejemplo, la figura 2.11 representa una relación en $A = \{1, 2, 3, 4\}$, definida por $R = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 4)\}$.
A los círculos del grafo se les llama vértices o nodos y a las líneas que los unen aristas o arcos.
Cuando los conjuntos sobre los cuales está definida la relación pertenecen a los reales, la relación se puede representar mediante una gráfica. Por ejemplo, sea la relación S definida en $\mathbb{R}$ por $4x^2 + 9y^2 = 36$, se representa por la gráfica en la Figura 2.12

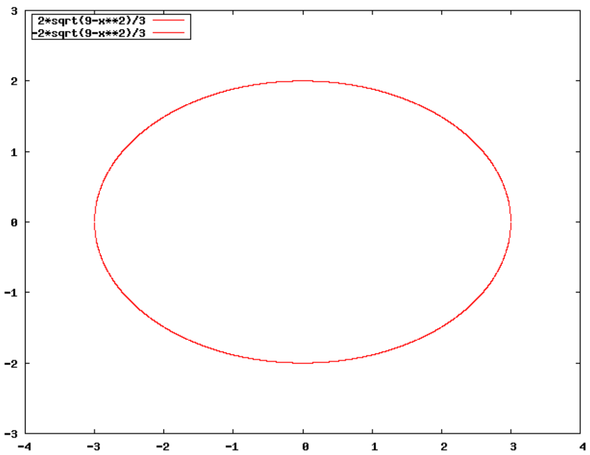

Figura 2.12: Ejemplo de una gráfica que representa una relación sobre $\mathbb{R}$.

2.9.5. Tipos de Relaciones

Considerando una relación sobre un conjunto A, se definen los siguientes tios de relaciones:

- Una relación R es *reflexiva* si aRa para cualquier $a \in A$. Por ejemplo, considere $A = \{a, b, c\}$, entonces las relaciones que contengan $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ serán reflexibas, además pueden contener otros elementos, pero para ser reflexibas por fuerza deben de contener los anteriores, solo contuvieran alguno o algunos de ellos tampoco sería reflexiba.

- Una relación es *simétrica* si aRb implica bRa. Por ejemplo, considere $A = \{a, b, c\}$, y la relación $R = \{(a, b), (b, a), (c, a), (a, c)\}$ sobre A. En este caso R es simétrica, ya que para cualquier par ordenado (x, y) también está dentro de la relación el par (y, x). En otras palabras, está en R (a, b) y está (b, a), está (a, c) y está (c, a), etc.

- Una relación es *antisimétrica* si aRb y bRa implica que $a = b$. Por ejemplo, la relación $R = \{(a, a), (a, b), (c, c)\}$, es antisimétrica ya que cuando tenemos dos pares (x, y) y (y, x), en todos los casos $x = y$, o en otras palabras, para saber si es antisimétrica vemos el par (a, b), búscamos si el par (b, a) también está en la relación y si está entonces se debe cumplir que $a = b$, entonces en la relación deben de estar por ejemplo $(1, 1)$ ya que $1 = 1$ pero si está $(1, 2)$ entonces para que sea antisimétrica no debe de estar $(2, 1)$ porque $2 \neq 1$.

- Una relación R es *transitiva* si aRb y bRc entonces aRc. Por ejemplo, sea $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, R es transitiva ya que están el par $(1, 2)$ ($a = 1$, $b = 2$ para al definición, y el par $(2, 3)$ ($b = 2$ y $c = 3$ para la definición), para que está relación sea transitiva tiene que estar dentro de la relación tambien el par $(1, 3)$ ($a = 1$, $c = 3$, para la definición), lo cual si sucede por lo tanto en este ejemplo R es transitiva.

A la relación sobre A que para todo aRb se cumple $a = b$, se le denota con el simbolo Δ_A.

2.9.6. Composición de Relaciones

Considere los conjuntos A, B y C, sea R una relación de A sobre B y sea S una relación de B sobre C. Entonces, la composición $(R \circ S)$, se define como $a(R \circ S)c$ si para un $b \in B$ existen aRb y bRc.

2.9.7. Clausura(Cerradura) de una relación

Considere una relación R sobre un conjunto A. Se definen las siguientes clausuras (cerraduras) de R.

- Una relación R^* es la clausura transitiva de R, si R es la relación más pequeña (con menor número de elementos) que contiene a R y es transitiva. Por ejemplo, consideremos $A = \{1, 2, 3\}$, y $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$, la clausura de R debe de contener a R, en otras palabras sera un conjunto de pares que contenga por lo menos los elementos de R, entonces tomemos $a = 1$, $b = 2$, y $c = 3$, se cumple que aRb porque $(1, 2)$ está en la relación, se cumple que bRc porque $(2, 3)$, para que sea transitiva se debe de cumplir que aRc que quiere decir que el par $(1, 3)$ debe de estar enla relación, entonces le agregamos este par a R y obtenemos la clausura $R^* = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

- Una relación R^* es la clausura simétrica de R , si R es la relación más pequeña (con menor número de elementos) que contiene a R y es simétrica. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$, entonces una relación que contiene los mismos elementos que R para que sea simétrica debe de contener a $\{(2, 1), (3, 3)\}$, por lo tanto la clausura simétrica de R, denotada como $R^* = \{(1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 3)\}$.

- Una relación R^* es la clausura reflexiba de R ,si R es la relación más pequeña (con menor número de elementos) que contiene a R y es reflexiba. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$, entonces una relación en A para que sea reflexiba debe d cumplir que para todo $a \in A$ se cumpla que aRa, en nuestro ejemplo si $a = 1$ debe de cumplirse que $(1, 1)$ esté en la relación, y como es *para todo* $a \in A$, entonces tambien debe de cumplirse que $(2, 2)$ y $(3, 3)$ también estén en la relación, por lo tanto la relación más pequeña que contiene a R y además es reflexiba es $R^*\{(1, 2), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

2.9.8. Relaciones de Equivalencia

Una relación R es de equivalencia si y solo si R es *reflexiva, simétrica y transitiva.*
Por ejemplo, la relación de equivalencia definida por $=$ es una relación equivalencia. Consideremos el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ sería $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, es reflexiba porque aRa ya que vemos que si $a = 1$, $(1, 1)$ está en la relación, e igual para todo $a \in A$ (es decir todo esto se cumple para todos los elementos de A). Es simétrica ya que para todos los aRb que están en la relación también está bRa, es decir como está $(1, 1)$, para $a = 1$ y $b = 1$, entonces tambien está bRa para $a = 1$ y $b = 1$. Y es transitiva, ya que para todos los elementos se cumple que si aRb y bRc entonces aRc ya que en este caso $a = b = c$, entonces si $a = 1$ entonces $b = 1$ y $c = 1$ y el par $(1, 1)$ está en la relación.

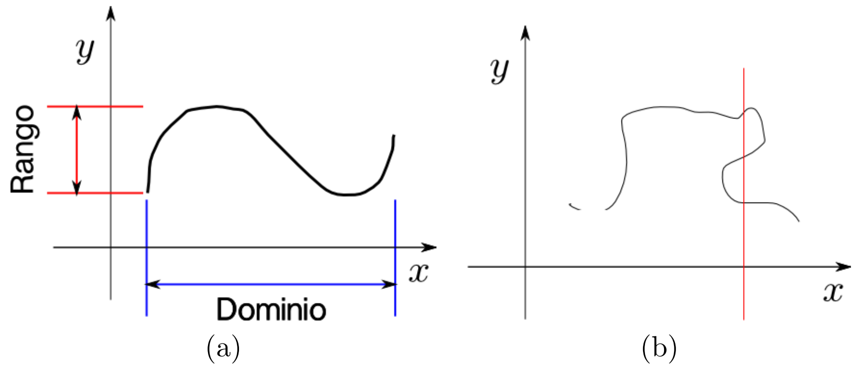

Figura 2.13: (a)Ejemplo de una función su dominio y rango. (b) Ejemplo de una relación que NO es función, ya que hay valores de x que tienen asociados más de un valor en y.

2.10. Funciones

Considere los conjuntos A y B, diremos que la relación f de A en B es una *función* si y solo si, para todo $a \in A$ existe un *único* $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Usaremos $f : A \longrightarrow B$ para denotar que f es una función de A en B. Y se denota $f(a)$ al único $b \in B$, tal que $(a, b) \in f$. Por ejemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 7, 4\}$, la relación $R = \{(1, 2), (2, 7), (4, 4), (3, 2)\}$ es una función, ya que a cada elemento de A solo se le asigno un elemento en B. Para ejemplos y explicaciones más prácticas se recomienda vistar el sitio en [3]

2.10.1. Dominio, Rango y Codominio de una Función

Sea f una función que va del conjunto A en B, es decir: $f : A \longrightarrow B$. Recordemos que cada valor en A tiene asociado un único valor en B, es decir los pares ordenados que son elementos de f contienen en la abscisa a todos los valores de A, a estos valores se les conoce como **dominio** de la función. Por ejemplo, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3, 4, -1\}$,y $f = \{(a, 2), (b, 3), (c, -1)\}$. A es el dominio de f, B es el codominio de f y el conjunto $\{2, 3, -1\}$ es el rango (o imagen) de f. Note que los valores de A solo aparecen un vez en los pares ordenados de f, es decir, $\{(a, 2), (b, 3), (c, -1), (a, 3)\}$ NO ES UNA FUNCIÓN ya que al elemento a no se le ha asignado un *único* elemento de B. También hay que notar que la diferencia entre el codominio y el rango es que el codominio son TODOS los valores de B y el rango son solo los valores que están en los pares ordenados de la función. La Figura 2.13 muestra un ejemplo de una relación que es una función y otra que no lo es, además en la Figura 2.13(a) se muestra el dominio y rango de la función.
Todas las fuciones deben de cumplir dos propiedades:**existencia y unicidad**.

Existencia.$\forall x \in X, \exists y \in Y | (x, y) \in f$

Existencia. *Para todo x que pertenece al conjunto X existe un y que pertenece al conjunto Y, tal que, el par ordenado (x, y) pertenece a f.*

Note que la condición de existencia especifica que "todos" los elementos de X deben de estar en un par ordenado de f, pero no es necesario que suceda lo mismo para los de Y.

Unicidad.$Si (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Unicidad. Si el para ordenado (x, y_1) pertenece a f, y el par ordenado (x, y_2) pertenece a f , esto implica (se cumple que) $y_1 = y_2$.)

Note que la condición de unicidad dice que no puede haber dos valores de y diferentes para alguna x, asi que si encontramos en una relacion, por ejemplo los pares $\{(1, 2), (1, 3)\}$ NO es una función, ya que para el mismo x (que vale 1) existen dos valores de y, en otras palabras, el valor asociado de y no es ÚNICO.
existencia y unicidad

2.10.2. Función Inyectiva

Diremos que una función $f : A \longrightarrow B$ es *inyectiva* si cumple que para $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$.Es decir:

Inyectiva. $Si\ \ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

Por ejemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 7, 4\}$, la relación $R = \{(1, 2), (2, 7), (4, 4), (3, 2)\}$, NO es una función inyectiva ya que $1, 3 \in A$ están relacionados con el mismo $2 \in B$ y $1 \neq 3$.

Otro ejemplo, si se tiene $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 7, 4\}$ y $R = \{(1, 4), (2, 7), (3, 4)\}$. SI es una función inyectiva ya que si tomamos, dos valores iguales del segundo elemento de los pares ordenados, es decir tomamos $f(a) = 4$, la definición nos dice que $f(a) = f(a')$, entonces por ejemplo, $f(a) = 4 = f(a')$ solo se obtiene si $a = 1 = a'$ o sea no existe otro elemento en A que esté relacionado con 4.

Se recomienda al alumno visite los sitios en [1], [3] para más ejemplos.

2.10.3. Función Sobreyectiva

Diremos que una función $f : A \longrightarrow B$ es *sobreyectiva* si para todo b que pertenece a B, existe a que pertenece a A, tal que $f(a) = b$.

Sobreyectiva. $Si\ \ \forall b \in B, \exists a \in A | f(a) = b \Rightarrow rango(f) = B$

Por ejemplo, si $A\{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$, y $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 3)\}$, es sobreyectiva ya que todos los elementos de B están en la relación.

2.10.4. Función Biyectiva

Diremos que una función $f : A \longrightarrow B$ es *biyectiva*http://www.physicsforums.com/showthread.php?t=246593 si para todo b que pertenece a B, existe un único a que pertenece a A, tal que $f(a) = b$. Es decir la función es *inyectiva* y *sobreyectiva*.

Biyectiva. *Si* $\forall b \in B, \exists a \in A | f(a) = b \wedge f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

Por ejemplo, sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, y $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$. Es una función biyectiva ya que a cada $x \in A$ se le asigno un $y \in B$ y a cada $y \in B$ solo le corresponde un $x \in A$.

Capítulo 3

Programa del Curso

Objetivo: desarrollar en el alumno los conocimientos, las habilidades y la aptitud para resolver problemas algebraicos.

1. Conjuntos y relaciones. ▪ Conjuntos y subconjuntos. ▪ Construcción de conjuntos a partir de otros. ▪ Propiedades. ▪ Producto Cartesiano. ▪ Conjuntos y operaciones con conjuntos. ▪ Relaciones, dominio y rango de una relación. ▪ Relación de equivalencia. ▪ Funciones, funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas e invertibles.
2. Números Enteros ▪ El conjunto de los números enteros. ▪ Operaciones y propiedades. ▪ Divisibilidad, propiedades y algoritmo de la división. ▪ Máximo común divisor, mínimo común múltiplo ▪ Algoritmo de Euclides.

3. Número Complejos ▪ Números complejos y operaciones básicas. ▪ Representación gráfica de la suma y productos de los números complejos. ▪ Los números complejos como un campo. ▪ Raices de complejos y teorema de Moivre
4. Polinomios ▪ Definición de polinomio y operaciones básicas. ▪ Divisibilidad y algoritmo de la división. ▪ Máximo común divisor, mínimo común multiplo y algoritmo de euclides. ▪ Polinomios irreducibles. ▪ Raíces y teorema fundamental del algebra. ▪ Fracciones parciales.
5. Matrices. ▪ Definición de matrices. ▪ Transpuesta de una matriz. ▪ Algebra de matrices. ▪ Matrices especiales: diagonales, triangulares, simétricas y antisimétricas.

Apéndice A

Símbolos utilizados en este texto

Cuadro A.1: Notación y símbolos utilizandos en el Capítulo 2.

Símbolo	**Uso**	**Ejemplo**
$A, B, ...$	Las letras mayúsculas se utilizan para notación de conjuntos.	Considere el conjunto A ...
$a, b, ...$	Las letras minúsculas se utilizan para notación de elementos de los conjuntos	El conjunto A tiene como elementos a a, b, c.
$\{\}$	Las llaves se utilizan para definir un conjunto.	$A = \{a, b, c\}$. Se lee: el conjunto A cuyos elementos son a, b, c.
$\in$	Pertenencia	Considere el conjunto $A = \{a, b, c\}$, entonces $a \in A$. Se lee: a pertenece a A.
$\notin$	NO pertenencia.	Entonces $z \notin A$. Se lee: a no pertenece a A.
$\mid$	tal que	$x \mid x$ es una vocal, entonces x puede ser igual a a, e, i, o, u. Se lee, x tal que x es una vocal.
$\cup$	Unión	Sea $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$ entonces $A \cup B = \{a, b, c\}$. Se lee, A unión B
$\cap$	Intersección	Sea $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$, entonces $A \cap B = \{b\}$. Se lee, A intersección B.
$\setminus$	Diferencia	Sea $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$, entonces $A \setminus B = \{a\}$. Se lee, A diferencia B.

Símbolo	Uso	Ejemplo
^{c}	Complemento	A^c. Se lee, A complemento. También se puede denotar como A'.
$\emptyset$	Conjunto Vacío	$A = \{\} = \emptyset$. Se lee, A es igual al conjunto vacío. Note que las llaves sin nada encerrado denotan el conjunto vacío también, está otra notación se utiliza para hacerlo por extensión, mientras que el símbolo $\emptyset$ es la notación por abstracción o comprensión.
$\subset$	Subconjunto	$A \subset B$. Se lee A es subconjunto de B, o A está contenido en B. Nota: Se utiliza este símbolo cuando A nunca será igual a B, porque B siempre tiene más elementos que A.
$\subseteq$	Subconjunto	$A \subseteq B$. Se lee A es subconjunto de B, o A está contenido en B. Nota: Se utiliza este símbolo cuando A *puede ser* exactamente igual a B.
$\not\subseteq$	No es subconjunto	$A \not\subseteq B$. Se lee, A no es subconjunto de B, o A no está contenido en B. Nota: Este simbolo indica que no es subconjunto en niguna forma así que siempre lleva la línea de abajo.
$>$	Mayor que	$a > b$. Se lee, a ***mayor que*** b
$<$	Menor que	$a < b$. Se lee, a ***menor que*** b
$\geq$	Mayor-igual que	$a \geq b$. Se lee, a ***mayor-igual que*** b
$\leq$	Menor-igual que	$a \leq b$. Se lee, a ***menor-igual que*** b
$\vee$	o	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ Se lee, A unión B es igual a x tal que x pertenece a A ***o*** x pertenece a B. Los simbolos: $\vee$ *o* son equivalentes.
$\wedge$	y	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ Se lee, A intersección B es igual a x tal que x pertenece a A ***y*** x pertenece a B. Los simbolos: $\wedge$, y son equivalentes.
$\forall$	Para todo	$\forall a \in A$. Se lee, ***para todo*** a que pertenece a A

Símbolo	Uso	Ejemplo
$\exists$	Existe	$\forall a \in A \exists b \in B$. Se lee, para todo a en A ***existe*** b que pertenece a B.
$\nexists$	NO Existe	$\nexists b \in B$. Se lee, ***no existe*** b que pertenece a B.
$\Rightarrow$	Implica que	$a > b \Rightarrow a - b \neq 0$. Se lee, a mayor que b ***implica que*** a menos b es diferente de 0. También se puede usar ***se cumple que*** en lugar de ***implica que***. **Note que:** El que $a > b$ implica que $a - b \neq 0$. Pero SI $a - b \neq 0$ eso NO IMPLICA QUE $a > b$, por eso la flecha solo apunta hacia un lado.
$\Leftrightarrow$	Si y solo si	$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$. Se lee, a es mayor que b ***si y solo si*** a menos b es mayor que 0. **Note que:** El que $a > b$ implica que $a - b > 0$ y además SI $a - b > 0$ a su vez IMPLICA QUE $a > b$, por eso la flecha apunta en ambas direcciones.

Bibliografía

[1] http://es.wikipedia.org/wiki/Función_matemática#Aplicaci.C3.B3n_inyectiva_y_no_sobreyectiva. *Wikipedia, Función*, 2009 (accessed October 18, 2009).

[2] http://es.wikipedia.org/wiki/Relación_matemática. *Wikipedia, Relación*, 2009 (accessed October 11, 2009).

[3] http://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html. *Disfruta las Matemáticas, Función*, 2009 (accessed October 18, 2009).

[4] Seymor Lipschutz and Marc Lipson. *2000 problemas resueltos de matemática discreta.* Mc Graw Hill, 2004.

[5] Francisco José Ortíz-Campos. *Matemáticas 2, Algebra y Funciones.* Publicaciones Cultural, 2006.

[6] José Luis A. Umaña-Yañez. *Nociones de Algebra.* Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial, UNAM, 2001.